「場の古典論」(ランダウ,リフシッツ著;広重徹,恒藤敏彦訳;増訂新版;東京図書,1964.9)において、作用が Lorentz 変換に対して不変な性質を用いて、相対論的な運動量とエネルギーの導出方法が記載されている。この方法では、4 元力や 4 元ベクトルを考えずに相対論的な運動量とエネルギーの導出することが可能となる。

ところで、作用が Lorentz 変換に対して不変であるかどうかの議論はなされておらず、証明が気になったので、作用の Lorentz 変換に対する不変性を以下で導出した。

(参考までに、作用の Lorentz 変換に対する不変性から相対論的な運動量とエネルギーを求める方法も記載した。)

(2026.01.15, 電磁気電算機研究所, エフラムダ)

作用のLorentz変換に対する不変性と、相対論的エネルギー

エネルギーが保存される x軸上の運動を考える。

K系から見て、時刻t_1からt_2迄、K'系から見て時刻t_1'からt_2'迄の運動について、K, K'系から見た作用を夫々S, S'とする。

K系から見た速度を$u(t)$, 加速度を$a(t)$, K'系から見た夫々を$u'(t')$, $a'(t')$とする。

K'系がK系に対し、x方向v(定数)の速度で運動するとき、

Lorentz変換は、 $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 但し $\beta = \dfrac{v}{c}$

ここで、K'系から見た作用S'は、K'系のLagrangian L'を用いて、

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} L'(x', u')\, dt'$$ (エネルギーが保存され、L'はt'に陽に依存しない)

$$= \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{dt'}{dt}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\, dt$$

ここで、K系から見たLagrangian Lに対し、

$$L = L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ と置くことが可能であれば、

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = S$$ となる。

以下、 $$F = L' \frac{1 - \frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ とおく。

K'系から見た速度 $u'(t')$ について

$$u'(t') = \frac{dx'}{dt'}$$

$$= \frac{dt}{dt'} \frac{dx'}{dt}$$

$$= \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\} \quad (\because \text{Lorentz 逆変換})$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2} \left(1 + \frac{v}{c^2} u'\right)(u - v)$$

$$\therefore (1-\beta^2) u' = \left(1 + \frac{v}{c^2} u'\right)(u-v)$$

$$= (u-v) + \frac{v}{c^2}(u-v)u'$$

$$\Leftrightarrow u' \left(1 - \beta^2 - \frac{v}{c^2} u + \frac{v^2}{c^2}\right) = u - v$$

$$\Leftrightarrow u' \left(1 - \frac{v}{c^2} u\right) = u - v$$

$$\therefore u' = \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2} u} \quad \cdots ①$$

また、

$$\frac{du'}{du} = \frac{d}{du} \frac{u-v}{1 - \frac{v}{c^2} u}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} u\right) - (u-v)\left(-\frac{v}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u\right)^2}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u\right)^2} \quad \cdots ②$$

K'系から見た加速度 $a'(t')$ について

$$a'(t') = \frac{du'(t')}{dt'}$$

$$= \frac{d}{dt'} \frac{u(t)-v}{1-\frac{v}{c^2}u(t)}$$

$$= \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}$$

$$= \frac{1+\frac{v}{c^2}u'}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{a\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)-(u-v)\left(-\frac{v}{c^2}a\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1+\frac{v}{c^2} \cdot \frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}\right) \cdot \frac{a\left(1-\frac{v}{c^2}u+\frac{v}{c^2}u-\beta^2\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2} \quad (\because ①)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1-\frac{v}{c^2}u+\frac{v}{c^2}u-\frac{v^2}{c^2}\right) \frac{a(1-\beta^2)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^3}$$

$$= \frac{a(t)\,(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u(t)\right)^3} \quad \cdots ③$$

また、以下の値を求める。

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\right) L'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial L'}{\partial x'} \quad \cdots ④$$

(∵ エネルギーが保存され、L' は t' に陽に依存しない)

$$\frac{\partial Z'}{\partial u} = \frac{\partial Z'}{\partial u'}\frac{du'}{du}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\frac{\partial Z'}{\partial u'} \quad (\because ②) \quad \cdots ⑤$$

$$\frac{dZ'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{du'}{dt}\frac{\partial}{\partial u'}\right) Z'$$

$$= \left[\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{du}{dt}\cdot\frac{du'}{du}\frac{\partial}{\partial u'}\right] Z'$$

$$= \left\{\frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'} + a\frac{(1-\beta^2)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\frac{\partial}{\partial u'}\right\} Z' \cdots ⑥$$

ここで

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(Z'\frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left(Z'\frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial Z'}{\partial u}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right) + Z'\left(-\frac{v}{c^2}\right)\right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial Z'}{\partial x}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right) - Z'\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial Z'}{\partial u'} - \frac{v}{c^2}Z'\right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial Z'}{\partial x'}$$

$(\because$ ④, ⑤, $u(=\dot{x})$ と x は独立で $\frac{\partial u}{\partial x} = 0)$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-\frac{v}{c^2}u}\frac{\partial L'}{\partial u'}\right) - \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dL'}{dt}$$

$$-\frac{1}{1-\beta^2}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial L'}{\partial x'}$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\cdot\frac{+\frac{v}{c^2}a}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\frac{\partial L'}{\partial u'} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right)$$

$$-\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\frac{u-v}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial L'}{\partial x'} + a\frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\frac{\partial L'}{\partial u'}\right\}$$

$$-\frac{1}{1-\beta^2}\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)\frac{\partial L'}{\partial x'}$$

$$= \frac{\partial L'}{\partial u'}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2}\left(\frac{v}{c^2}a-\frac{v}{c^2}a\right)$$

$$+\frac{\partial L'}{\partial x'}\frac{1}{1-\beta^2}\left(-\frac{u}{c^2}v+\beta^2-1+\frac{v}{c^2}u\right)$$

$$+\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right)$$

$$= -\frac{\partial L'}{\partial x'} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u}\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right)$$

$$= \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial u'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x'}$$

$= 0$ (∵ Euler-Lagrange eq. at K'系)

No. 6

Date

即ち、$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ で、

Fは K系での Lagrangian L であると見れる。

故に、

$$L' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}} = F = L \quad \text{であり、}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \frac{1-\frac{v}{c^2}u}{\sqrt{1-\beta^2}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = S$$

が成立する。

∴ 作用Sは、Lorentz変換に対し不変。

以下、自由運動を考える。

Lorentz変換に対する不変量は、固有時τに比例し、定数αにより、

$$S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \quad \text{とおける。}$$

$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ より、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\, dt$$

∴ K系での Lagrangian L は、$L = \alpha\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$.

$u \ll c$ の古典的極限で、$L = \alpha\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \to \alpha\left(1-\frac{u^2}{2c^2}\right) = \alpha - \frac{\alpha u^2}{2c^2}$

古典的 Lagrangian は $L = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{df(x,t)}{dt}$

但し、$f(x,t)$ は任意の関数

$f(x,t) = \alpha t$ とおくと、

$$L = \frac{1}{2}mu^2 + \alpha = \alpha - \frac{\alpha u^2}{2c^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = -mc^2.$$

故に、相対論的 Lagrangian は、

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

K系において、
x 方向の運動量 p_x は、 $p_x = \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{-mc^2\left(-2\frac{u}{c^2}\right)}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

エネルギー E は、

$$E = pu - L$$

$$= \frac{mu^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$